

基于广义传递函数的非线性碰撞数据模态分析

秦真山¹, 陆史浩¹, 阮军武¹, 李思远^{2*}, 宋汉文^{3*}

1. 广西玉柴机器股份有限公司工程研究院, 广西 玉林 537000;

2. 山东大学能源与动力工程学院, 山东 济南 250061;

3. 同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092

摘要:研究机械系统各部件间隙导致的碰撞现象,设计单边约束悬臂梁施加正弦激励的碰撞试验,根据实测的悬臂梁各离散点加速度响应与碰撞力构造广义传递函数,仿真分析混沌响应和周期响应下该广义传递函数的模态分布。结果表明:混沌响应下的传递函数包含准确的模态频率信息,且该广义传递函数与系统所受水平激励的振幅无关;将仿照 ERA-NExT 法辨识出的模态参数与悬臂梁模态振型进行比较,发现由混沌响应得到的模态振型与悬臂梁模型的模态振型整体一致,前 4 阶振型的吻合程度很好。

关键词:非线性振动;悬臂梁;单边碰撞;混沌运动;模态辨识

中图分类号:TH113

文献标志码:A

文章编号:1673-6397(2024)03-0001-08

引用格式:秦真山,陆史浩,阮军武,等.基于广义传递函数的非线性碰撞数据模态分析[J].内燃机与动力装置,2024,41(3):1-8.

QIN Zhenshan, LU Shihao, RUAN Junwu, et al. Modal analysis of nonlinear collision data based on generalized transfer function[J]. Internal Combustion Engine & Powerplant, 2024,41(3):1-8.

0 引言

机械系统中各个零部件之间难免发生碰撞,各部件连接处的间隙也会导致碰撞,并表现出复杂的非线性动力学行为。间隙可能是由于过度磨损,例如旋转机械^[1]、打桩机^[2],也有可能是设计时为了组装或热扩散等原因在支撑点预留的空隙^[3]。在外力作用下,这些间隙导致组件之间发生碰撞,影响机械系统的寿命甚至发生事故,研究碰撞问题具有重要的现实意义。

从 20 世纪 80 年代开始,众多学者对振动碰撞问题开展了试验研究^[4-6]。张磊等^[7]利用受正弦激励的单边碰撞悬臂梁系统,发现了混沌运动和周期运动,并采用 Runge-Kutt 法进行数值模拟,仿真结果与试验结果具有高度一致性。传递函数或频率响应函数通常作为结构输入和输出之间的频域关系,能够在很宽的频率范围内表征结构的动态特性,可用于机械和土木结构的设计、识别、监测和控制^[8-9]。在模态辨识方法方面,韩建平等^[10]使用自然激励技术对桥梁结构阻尼比进行识别,结果表明该方法可以减轻噪声影响,提高识别精度;Wang 等^[11]提出了一种基于经验模态分解算法的特征系统实现算法,用于识别低频振荡中的频率、阻尼和振动,证明了该方法在区分振荡频率、阻尼比和振型的有效性。

基于上述研究,本文中利用单边约束悬臂梁施加正弦激励的碰撞试验,构造广义传递函数,对系统模态

收稿日期:2024-02-17

基金项目:广西科技重大专项项目(2023AA11002)

第一作者简介:秦真山(1980—),男,江苏徐州人,工学硕士,工程师,主要研究方向为发动机振动与噪声控制,E-mail:93666082@qq.com。

* 第一通信作者简介:李思远(1991—),男,山东枣庄人,工学博士,实验师,主要研究方向为内燃机燃烧和振动控制、燃料电池技术,E-mail:lisiyuan@sdu.edu.cn。

* 第二通信作者简介:宋汉文(1961—),男,山西文水人,工学博士,教授,主要研究方向为结构动力学,E-mail:hwsong@tongji.edu.cn。

信息进行辨识,研究系统的间隙碰撞,揭示机械组件的碰撞机理,对延长机械系统寿命具有重要意义。

1 试验设计与试验现象

设计非线性碰撞试验对单边约束悬臂梁施加稳态正弦基础激励,由于传感器质量相比悬臂梁总质量不可忽略,此处将其作为自由端的附加集中质量处理。试验装置及其示意图如图1所示,图中 δ 为力传感器与碰撞点的水平间隙, d 为力传感器和悬臂梁发生碰撞位置的距离。悬臂梁尺寸及材料属性如表1所示。

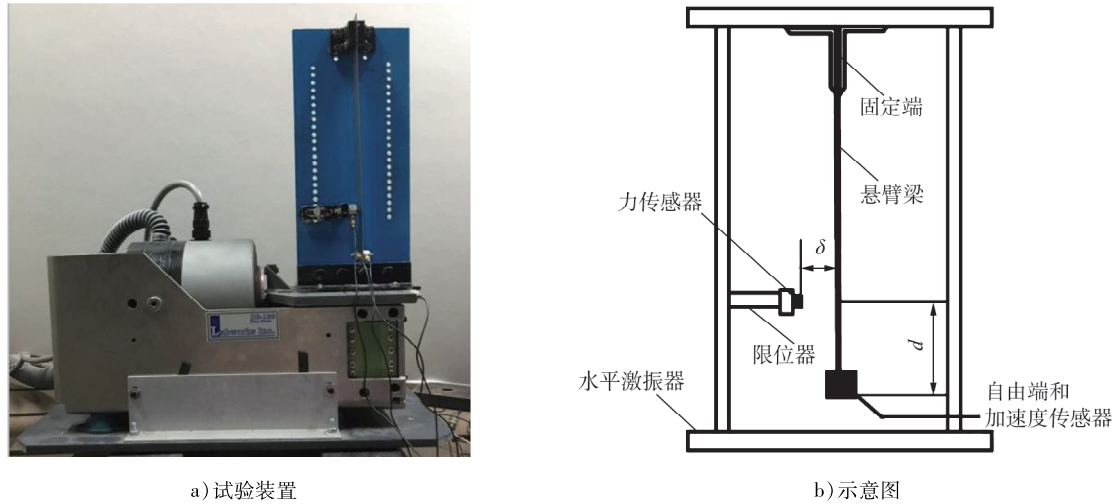


图1 试验装置及其示意图

表1 悬臂梁尺寸及材料属性

厚度/mm	宽度/mm	长度/mm	弹性模量 E /GPa	密度 ρ /($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	质量 m /g	末端附加质量 m_0 /g
1	30	280	209	7 900	60	19

为模拟单边碰撞,用螺栓将力传感器固定在试验台竖直底板上的左侧预留孔中,保证悬臂梁与力传感器相对位移为0时发生碰撞;在限位器上安装力传感器记录每次碰撞时的碰撞力,进行频域与时域分析;螺栓固定位置可以水平调节,改变限位器与碰撞点水平间隙 δ ,也可以选择不同预留孔改变力传感器和悬臂梁发生碰撞位置的距离 d 。本次试验中 $\delta=0$, $d=60$ mm,使该悬臂梁在平衡位置与限位器发生正碰。在对系统施加正弦激励前,运用锤击法对悬臂梁系统进行模态试验,得到带集中质量悬臂梁系统的模态参数,对比悬臂梁不同激励频率下广义传递函数,其前4阶模态频率和阻尼比如表2所示。

表2 模态测试结果对比

模态阶数	固有频率/Hz	阻尼比/%
1	6.0	1.13
2	46.5	0.38
3	140.0	0.16
4	278.9	0.16

试验中使用水平激振器作用于系统竖直底板,进而对固定于竖直底板上的悬臂梁系统施加稳态正弦基础激励,因此,悬臂梁系统的输入是系统竖直底板受到的基础运动。试验中水平激振器的振幅为 $0.2g$ (g 为自由落体加速度)。

悬臂梁正弦激励的位移

$$y = A \sin(\omega t),$$

式中: A 为激励幅值, ω 为激励频率, t 为激励时间。

悬臂梁正弦激励频率间隔为1 Hz。由于试验系统为非线性系统,碰撞点上测得的力与自由端的振动加速度响应不是线性系统输入输出的关系,二者的频率比并非一般模态分析意义下的频率响应函数,本文中称为广义传递函数,根据该广义传递函数发现和辨识系统的模态参数。

广义传递函数

$$H_a(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2} \frac{\ddot{Y}(\omega)}{F(\omega)}, \quad (1)$$

式中: ω 为激励频率, $\ddot{Y}(\omega)$ 为振动加速度, $F(\omega)$ 为系统输入力。

文献[12]分析结果表明:在振动台基础激励下,基础激励频率为 11、22、34、45 Hz 时,系统响应为周期响应;当基础激励频率为 6、16、30、52 Hz 时,系统响应为混沌响应。

传递函数通常用幅频特性曲线表示,即传递函数的幅值对输入信号不同频率分量的响应。不同基础激励频率下,周期响应和混沌响应时的广义传递函数如图 2、3 所示,图中红色虚线从左到右依次为表 2 中悬臂梁的 1~4 阶固有频率。

由图 2、3 可知:广义传递函数的峰值与悬臂梁固有频率吻合程度较好,基础频率为 34、30 Hz 处的峰值与悬臂梁的 1~4 阶固有频率的幅值接近;此外,周期响应和混沌响应时的广义传递函数有截然不同的特征,混沌响应对应的广义传递函数曲线十分光滑,周期运动频率对应的广义传递函数毛刺非常多,虽有类似于前者的轮廓,但峰值信息难以准确读取。

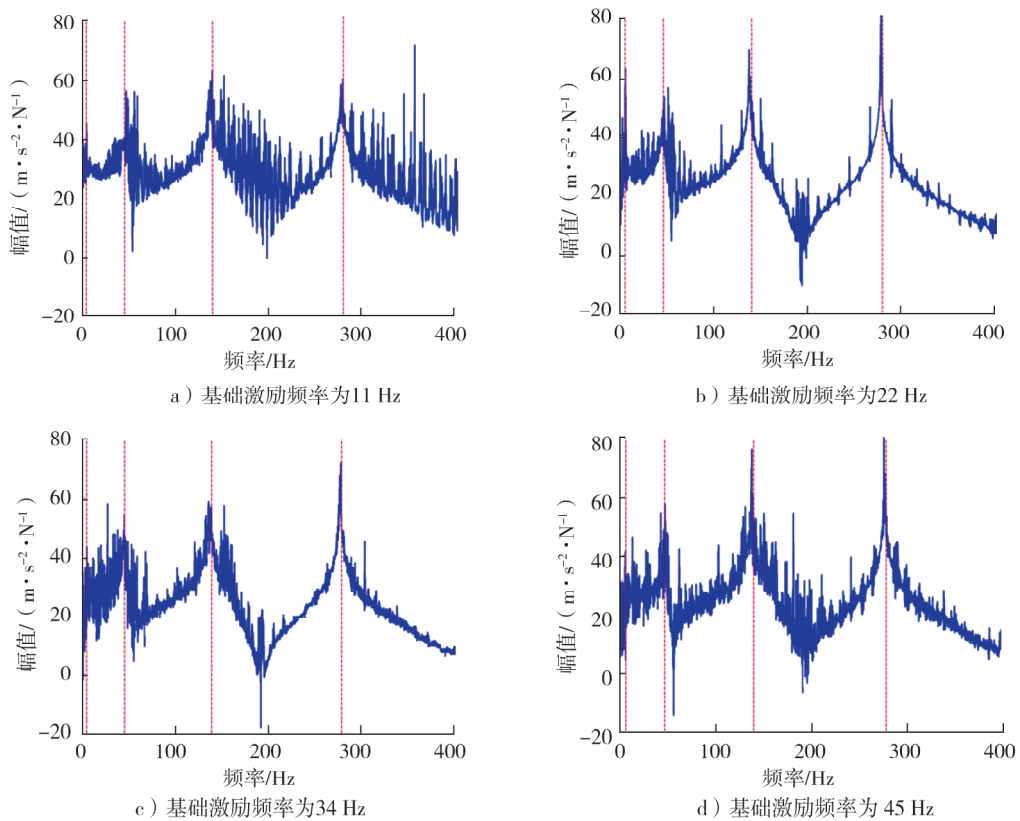
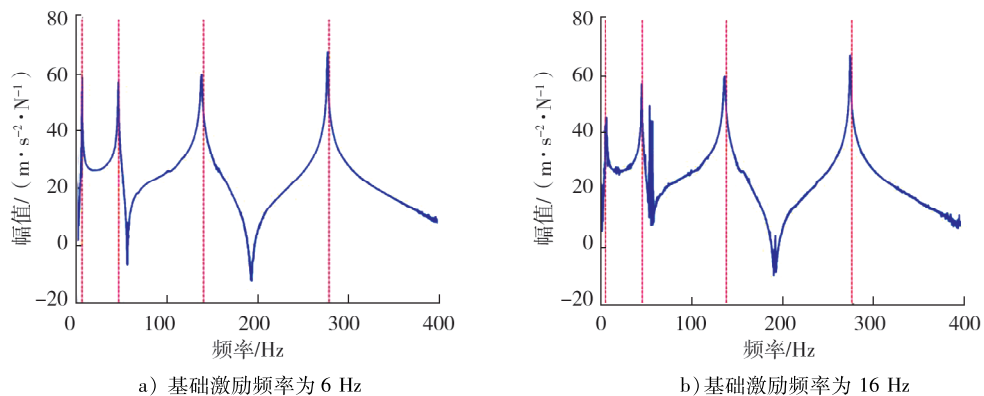


图 2 周期响应时的传递函数



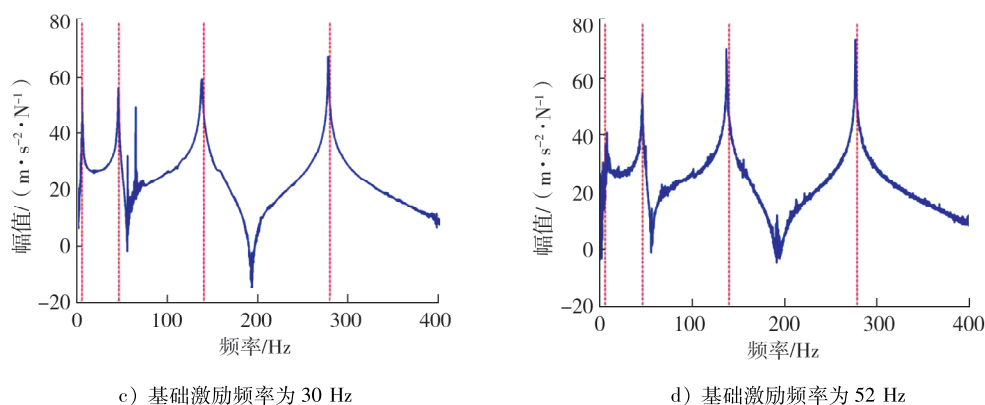


图3 混沌响应时的传递函数

2 初始条件对广义传递函数的影响

由于试验条件限制,未改变试验初始条件,在 MATLAB 仿真模型中对碰撞模型施加幅值为 $0.2g$ 、 $0.5g$ 、 $0.6g$ 、 $1.0g$ 的正弦激励,获得各离散点的位移、加速度响应与碰撞力。由于图 2 中基础激励频率为 34 Hz 处与图 3 中基础激励频率为 30 Hz 处的峰值分别与系统固有频率接近,以混沌响应的频率为 30 Hz 和周期响应的频率为 34 Hz 为例,对时间进行无量纲处理,仅比较不同振幅下悬臂梁自由端的位移响应的形状及幅值变化情况,随机选取悬臂梁振动一段时间的位移,不同基础激励频率下的变振幅位移响应曲线如图 4 所示;根据悬臂梁自由端加速度响应与碰撞力求得其广义传递函数曲线如图 5 所示。

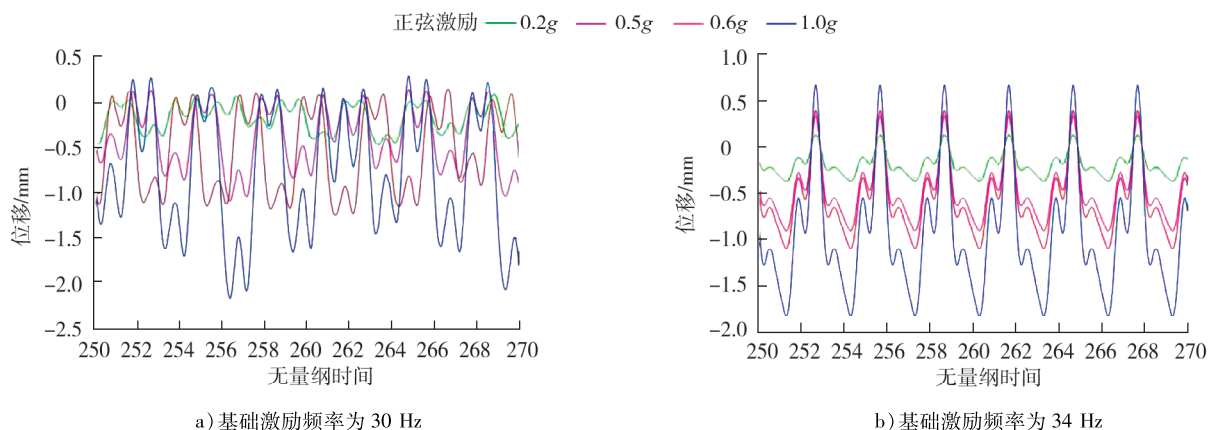


图4 基础激励频率为 30、34 Hz 时的变振幅位移响应曲线

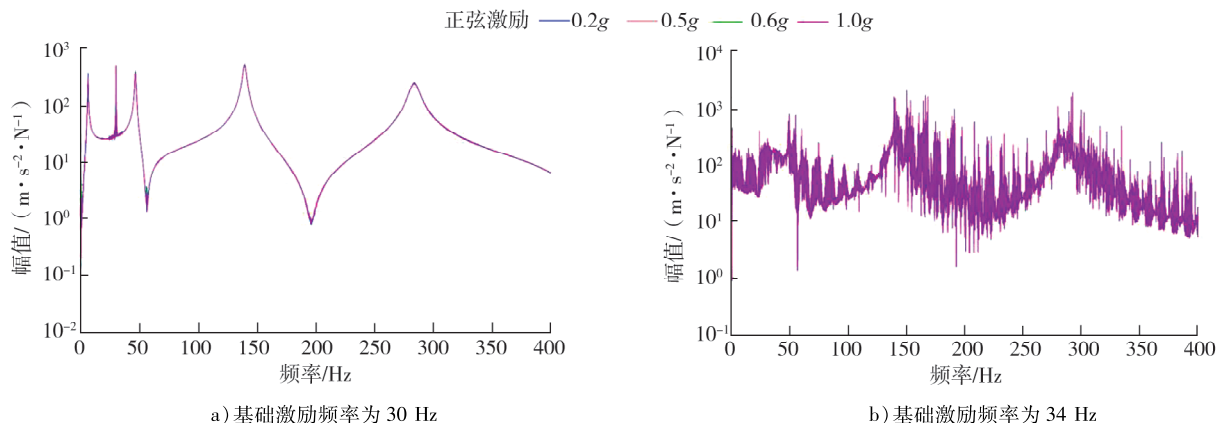


图5 基础激励频率为 30、34 Hz 时的变振幅广义传递函数曲线

由图4可知:在混沌频率下,不仅悬臂梁自由端的响应幅值成比例变化,形状也发生了变化;非混沌频率下,响应幅值按比例变化,形状也保持一致。由图5可知:在不同基础激励幅值下计算得到的广义传递函数高度一致,4条曲线几乎完全重合。

不同频率、不同振动加速度下悬臂梁的自由端加速度响应与碰撞力的广义传递函数如图6、7所示。

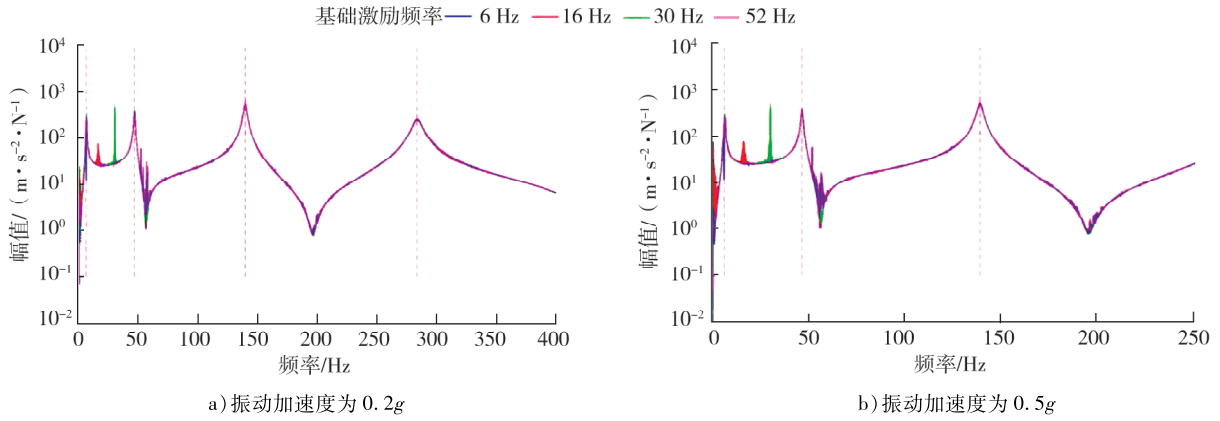


图6 不同频率、不同振动加速度下混沌区广义传递函数

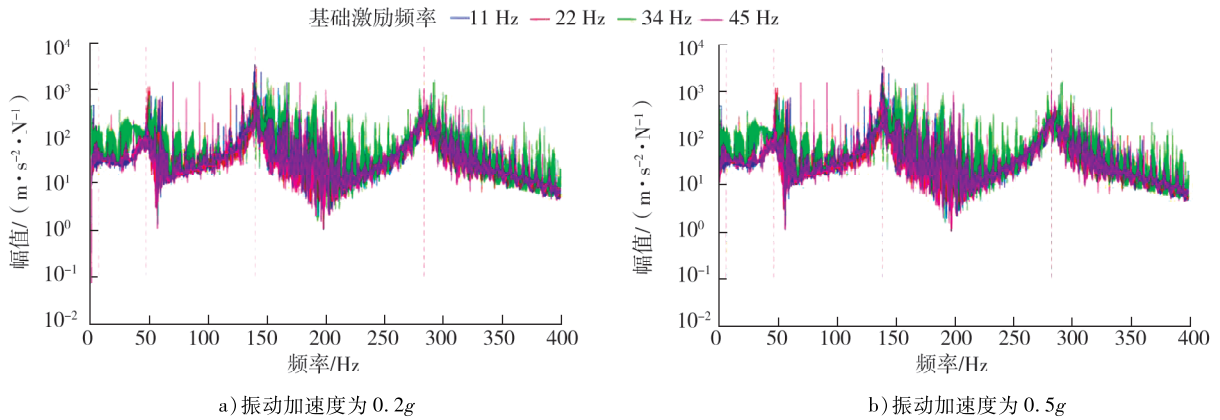


图7 不同频率、不同振动加速度下非混沌区的广义传递函数

由图6、7可知:在混沌区频率下,所有广义传递函数曲线均吻合较好,只在基础激励频率(6、16、30、52 Hz)附近有着差别,其余部分几乎完全相同;在非混沌区频率(11、22、34、45 Hz)下,不同基础激励频率广义传递函数曲线之间的吻合度较差,在全频率上均不能很好地吻合,同一频率点上各基础频率幅值差别较大,难以用来辨识信息;与试验结果相一致,混沌区对应的广义传递函数曲线光滑,非混沌区对应的广义传递函数曲线粗糙。

3 广义传递函数与频响函数对比

混沌运动(基础激励频率为30 Hz)与周期运动(基础激励频率为11 Hz)下,将悬臂梁均匀简化为10个离散点,第8点无碰撞悬臂梁的频响函数 $H_a(10, 8)$ 与悬臂梁的仿真广义传递函数及试验广义传递函数如图8所示。将悬臂梁离散为8个自由度,混沌运动下第8点无碰撞悬臂梁的频响函数 $H_a(8, 8)$ 与悬臂梁的仿真广义传递函数如图9所示。

由图8可知:基础激励频率位于混沌区时,3条曲线在悬臂梁振动响应频率为0~400 Hz时吻合很好,特别是仿真广义传递函数曲线与频响函数曲线几乎完全重合,试验广义传递曲线与前二者之间的误差是由测量误差引起的;在信号的高频段,3条曲线的吻合程度比低频段降低,这是由于本文中将悬臂梁离散为10个自由度只能保证前4阶精度造成的;在非混沌区,三者之间的吻合相对较差;10个离散点的

仿真广义传递函数与频响函数较好的吻合。

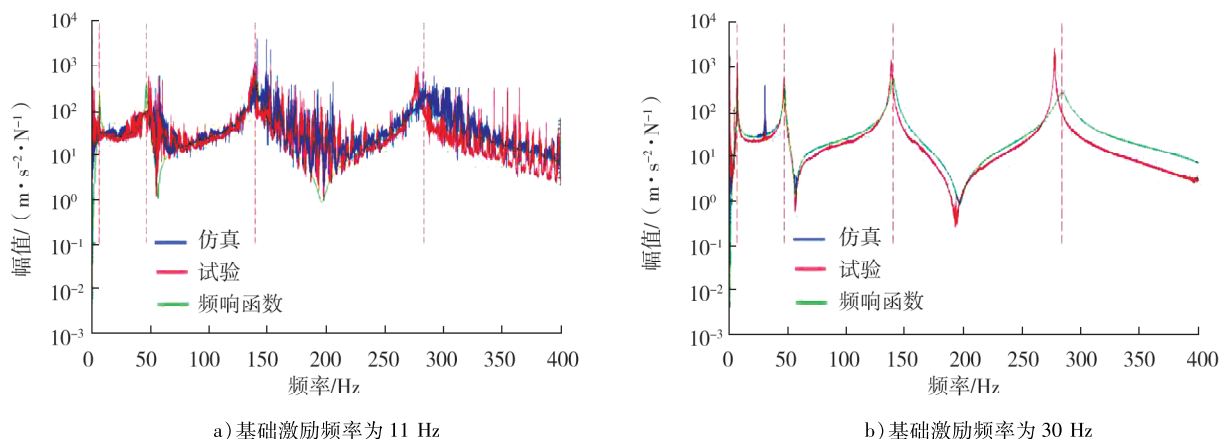


图8 基础激励频率分别为11、30 Hz的仿真、试验广义传递函数与频响函数 $H_a(10,8)$ 对比曲线

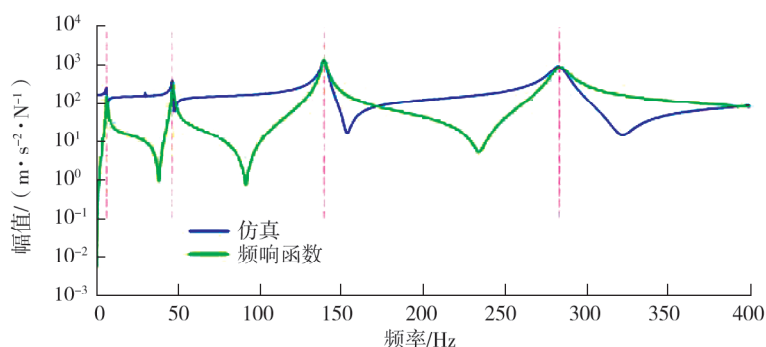


图9 基础激励频率为30 Hz 仿真广义传递函数与频响函数 $H_a(8,8)$ 对比

由图9可知:混沌区激励频率下,第8点的广义传递函数与相应频响函数在形状上不完全匹配,但二者在共振峰处吻合较好,峰值几乎完全一致。

4 模态参数辨识

在混沌区激励频率下,加速度响应与碰撞力广义传递函数曲线与频响函数曲线几乎相同。鉴于本文中悬臂梁模型模态分布不密集,各阶模态之间距离较大,广义传递函数不受初始条件影响,可以很方便地获取传递函数的实频与虚频部分,因此可从传递函数中辨识固有频率和振型。将辨识结果与悬臂梁固有模态参数进行对比,并计算二者的相对误差,频域法固有频率辨识结果如表3所示。由表3可知:频域法对模型各阶固有频率均有良好的辨识能力。

表3 频域法固有频率辨识结果对比

阶次	模型固有频率/Hz	辨识结果/Hz	相对误差/%
1	6.10	6.19	1.475
2	46.29	46.44	0.324
3	139.12	139.38	0.187
4	283.38	283.44	0.002

注:相对误差为辨识结果与模型固有频率的差与模型固有频率的比。

自然激励法(natural excitation technique, NExT)^[13]是将随机响应转化为自由衰减响应的一种数据处理方法,是使用系统在零均值的平稳高斯白噪声激励下随机响应的相关函数代替自由衰减代入后续的辨识算法。特征系统实现算法(eigen-system realization algorithm, ERA)利用 N 自由度线性系统的状态方程和系统最小实现理论,采用奇异值分解技术,求解系统矩阵的特征值得到系统的模态参数^[14-15]。由于本文中非线性悬臂梁碰撞系统的混沌响应与无限位线性悬臂梁系统的脉冲响应在统计上具有一定的相似性,因此

将各离散点的混沌响应信号作互相关函数,用该互相关函数代替 ERA 法中 Hankel 矩阵中的脉冲响应函数求解系统的模态参数^[16-17],并与 NExT 法结合,称为仿 ERA-NExT 法。利用仿 ERA-NExT 法辨识悬臂梁模型固有频率与振型,固有频率与模态辨识结果对比如表 4 所示。由表 4 可知:仿 ERA-NExT 法也能够有效辨识模型固有频率,仅在 1 阶时相对误差较大。

通过测量广义传递函数的虚频曲线的峰值可以确定留数,从而获得该碰撞模型的各阶振型,利用仿 ERA-NExT 法与频域法求得基础激励频率为 30 Hz 时辨识的第 1~4 阶振型,与模型理论振型对比,各阶振型如图 10 所示。

表 4 仿 ERA-NExT 法固有频率辨识结果对比

阶次	模型固有频率/Hz	辨识结果/Hz	相对误差/%
1	6.10	7.184 3	17.775
2	46.29	47.863 2	3.399
3	139.12	138.995 5	0.089
4	283.38	282.971 8	0.144

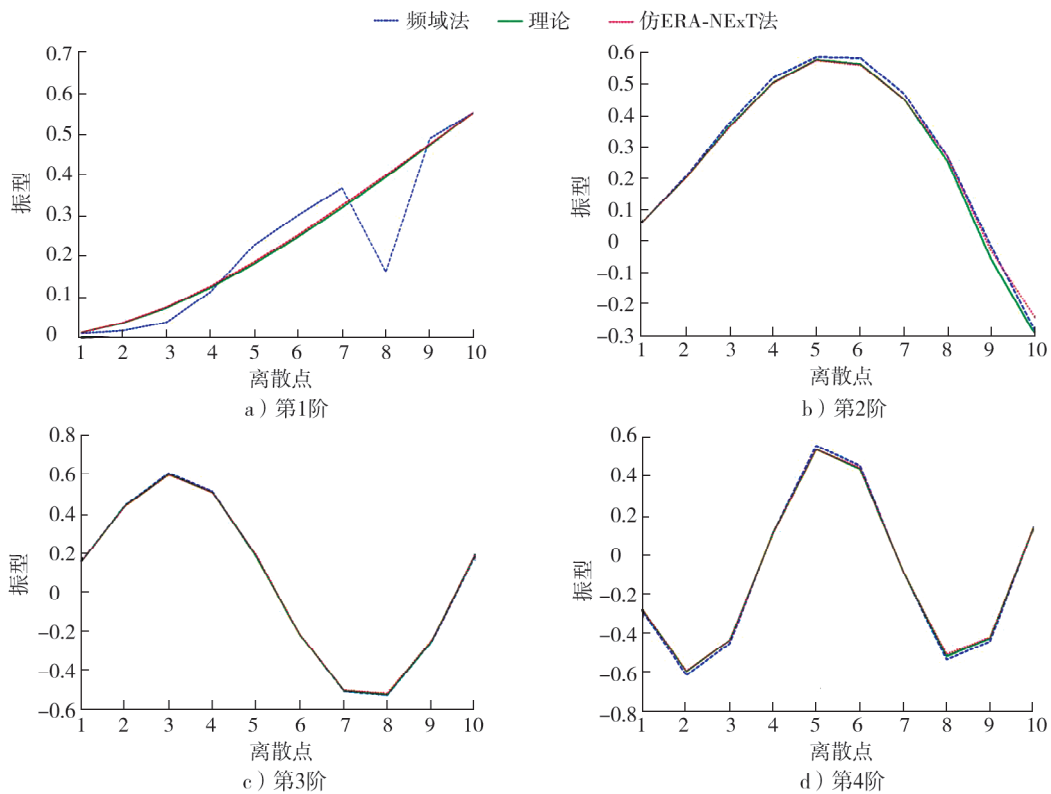


图 10 基础激励频率为 30 Hz 时辨识的前 4 阶模态振型

由图 10 可知:利用频域法求得的振型与模型理论振型仅在第 1 阶振型有偏差,其余的各阶振型吻合程度较好;除第 8 点外,第 1 阶振型中由混沌响应计算得到的碰撞模型与悬臂梁模态振型的整体轮廓十分相似,证明非线性悬臂梁碰撞系统的混沌响应与无限位线性悬臂梁系统的脉冲响应在统计上具有一定的相似性。

仿 ERA-NExT 法辨识出来的模态参数与理论参模态参数吻合的非常好,不论是形状还是数值都几乎一致,说明非线性悬臂梁碰撞系统在基础激励下的混沌响应在统计学上类似于无限位悬臂梁系统在随机激励下的响应。

5 结论

为研究机械系统各部件间隙导致的碰撞现象,设计了单侧悬臂梁碰撞试验,分析了不同基础激励频

率下系统的广义传递函数;利用该系统广义传递函数,结合频响函数、仿 ERA-NExT 法,辨识了系统模态参数。

1)在混沌响应下,离散点加速度响应与碰撞点力之间的广义传递函数十分光滑;在非混沌响应下,该广义传递函数毛刺较多。

2)混沌响应下,离散点加速度响应与碰撞点力之间的广义传递函数与无碰撞悬臂梁模态试验获得的频响函数类似,且验证了该广义传递函数不受系统水平激励振幅的影响。

3)运用频域法,利用仿 ERA-NExT 法辨识模态参数,将辨识的模态参数与悬臂梁系统的各阶模态振型进行比较,发现由混沌响应得到的模态振型与悬臂梁模型的模态振型整体一致,前4阶振型的吻合程度很好,说明非线性悬臂梁碰撞系统在基础激励下的混沌响应在统计学上类似于无限位悬臂梁系统在随机激励下的响应。

参考文献:

- [1] LI G X, PAIDOUSSIS M P. Impact phenomena of rotor-casing dynamical systems[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1994, 5(1): 53-70.
- [2] LUO G W, YAO H M. Dynamics of a small vibro-impact pile driver[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2008, 9(4): 1361-1377.
- [3] HASSAN M A, WEAVER D S, DOKAINISH M A. The effects of support geometry on the turbulence response of loosely supported heat exchanger tubes[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2003, 18(5): 529-554.
- [4] MOON F C, SHAW S W. Chaotic vibrations of a beam with non-linear boundary conditions[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1983, 18(6): 465-477.
- [5] SHAW S W. Forced vibrations of a beam with one-sided amplitude constraint: theory and experiment[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1985, 99(2): 199-212.
- [6] CUSUMANO J P, SHARKADY M T, KIMBLE B W. Experimental measurements of dimensionality and spatial coherence in the dynamics of a flexible-beam impact oscillator[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Physical and Engineering Sciences*, 1994, 347(1683): 421-438.
- [7] 张磊,宋汉文.单边碰撞悬臂梁系统的实验研究和数值模拟[J]. *噪声与振动控制*, 2015, 35(4): 25-29.
- [8] ALLEMANG R J, PATWARDHAN R S, KOLLURI M M, et al. Frequency response function estimation techniques and the corresponding coherence functions: a review and update [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 162: 108100.
- [9] ZENG Y C, NÚÑEZ A, LI Z L. Measuring transfer functions of track structures in a test rig with laser Doppler vibrometer and accelerometers on a moving vehicle[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2024, 214: 111392.
- [10] 韩建平,张鸿宇,安鹏强.基于自然激励技术和 FT 时移特性的模态阻尼比识别方法[J]. *世界地震工程*, 2020, 36(3): 19-26.
- [11] WANG Y R, WANG J B, MENG Q K, et al. Power system oscillation modes identification based on eigen system realization algorithm via empirical mode decomposition[J]. *Energy Procedia*, 2012, 17: 189-195.
- [12] 朱媛,张磊,宋汉文.单侧限位悬臂梁碰撞系统的动力学实验研究[J]. *动力学与控制学报*, 2017, 15(4): 363-372.
- [13] JAMES G H, CARNE T G, LAUFFER J P. The natural excitation technique (NExT) for modal parameter extraction from operating structures modal analysis [J]. *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 1995, 10(4): 260-277.
- [14] ROOSN R G, LAPIDUS L. Minimum realizations and system modeling: I: Fundamental theory and algorithms [J]. *AIChE Journal*, 1972, 18(4): 673-684.
- [15] 逯静洲, SIM S H, SPENGER B F. 基于随机减量的分布式结构模态参数识别 [J]. *振动与冲击*, 2017, 36(17): 48-54.
- [16] PAPOULIS A, POLLAI U. Probability, random variables, and stochastic processes, fourth edition [M]. Boston, USA: McGraw-Hill Education, 2002.
- [17] 姚建华. 模态辨识及模态价值分析 [D]. 西安: 西安电子科技大学, 2014.

(下转第 15 页)