

非饱和路基一维瞬态响应精确解

杨相如¹, 卜力平¹, 陈雪梅², 赵云^{2*}

1. 福建船政交通职业学院土木工程学院, 福建 福州 350007; 2. 河南工业大学土木工程学院, 河南 郑州 450001

摘要:为反应路基非饱和和三相介质的实际状态,将路基视为固相与液相不可压缩、气相可压缩的非饱和多孔介质,基于非饱和多孔介质表述方法,考虑惯性、黏滞和机械耦合作用,建立无量纲化的非饱和路基一维波动方程,以一类非齐次边界为例,通过边界齐次化和特征函数法将问题转化为二阶常微分方程初值问题,并用状态空间法求解,获得单层非饱和路基一维瞬态响应的精确解,通过算例验证结果的正确性。分析单层非饱和路基在阶跃荷载和正弦荷载下一维瞬态响应的特点,结果表明,与可压缩的饱和土和非饱和土不同,不可压缩非饱和路基中只存在1种压缩波,液相饱和度增大,压缩波波速和振动幅值减小。结论可为复杂环境荷载作用下非饱和路基的优化设计和灾害防控提供参考。

关键词:岩土工程;非饱和路基;瞬态响应;解析解

中图分类号:U213.1

文献标志码:A

文章编号:1672-0032(2025)03-0061-07

引用格式:杨相如, 卜力平, 陈雪梅, 等. 非饱和路基一维瞬态响应精确解[J]. 山东交通学院学报, 2025, 33(3): 61-67.

YANG Xiangru, BU Liping, CHEN Xuemei, et al. Analytical investigation of one-dimensional transient response for unsaturated subgrade[J]. Journal of Shandong Jiaotong University, 2025, 33(3): 61-67.

0 引言

随着机场、高速铁路和地铁等交通设施的快速发展,交通动载引发的路基振动和沉降问题受到广泛关注。动载作用下路基的动力响应规律是相关问题分析的关键,对交通设施的设计和运营具有重要意义。

根据研究目的不同,学者们建立的路基模型可分为单相介质、两相饱和介质和三相非饱和介质。Kausel^[1]提出一种改进的刚度矩阵法用于层状路基的动力响应问题分析。Ma等^[2]采用提出曲线2.5D有限元方法,研究移动轮载下曲线路基土体的动力响应。Dineva等^[3]总结在三维弹性动力学问题中考虑材料均匀性及各向同性和异性的基本解。Ling等^[4]建立飞机-道面结构-道基半解析有限元模型,研究山区机场挖填交替的路基形式对动力响应的影响。上述研究中路基均考虑为单相介质模型,为考虑路基中存在的水的影响,Wang等^[5]提出各向异性饱和半空间的动力格林函数。Zhang等^[6]给出不同水力边界条件下成层横观各向同性路基在简谐竖向和水平动荷载下的动力响应。Bian等^[7]采用2.5D有限元方法研究饱和路基中超静孔隙水压力的消散规律。实际工程中,路基通常处于非饱和状态。随着非饱和多孔介质波动理论的发展,求解非饱和路基的动力响应成为可能。Tang等^[8]建立路面系统-非饱和半空间模型,给出飞机荷载下路基动力响应的半解析解。Zi等^[9]给出移动简谐荷载下各向同性和横观各向同性成层非饱和介质的动力响应。基于分离变量法和积分变换方法,Shan等^[10]求得黏弹性非饱和多孔

收稿日期:2024-04-03

基金项目:福建省自然科学基金(2021J01338);福建船政交通职业学院校级科教发展基金项目(20220202)

第一作者简介:杨相如(1982—),女,湖南长沙人,副教授,工学硕士,主要研究方向为软土与特殊岩土,E-mail:xiangruy@126.com。

*通信作者简介:赵云(1989—),男,河南周口人,讲师,工学博士,主要研究方向为软土与特殊岩土,E-mail:zhaoyun1106@163.com。

介质的瞬态响应在一维单层情况下的解。Zhao 等^[11]获得一般性边界条件下非饱和多孔介质瞬态响应半解析解。李伟华等^[12]提出显式有限元算法,运用于研究非饱和介质的动力反应,并讨论饱和度对非饱和路基振动响应的影响。Gao 等^[13]采用 2.5D 有限元方法研究饱和度对移动荷载下地面振动及超静孔隙水压力的影响,结果表明超静孔隙水压力最大幅值出现在地表距 1.5~2.0 m 处,且随路基饱和度降低显著减小。

路基模型的发展呈现由单相介质发展到饱和双相介质,再到更能反应路基实际状态的非饱和三相介质的趋势。多孔介质各成分间相互作用较复杂,大多需通过时间和空间离散的数值方法获得相关问题的解答,在一维情况下也只能提供特定条件下的解答。针对路基一维瞬态响应精确解的研究,可验证数值结果的有效性和精度,可理解动荷载作用下路基的动力学特性。

本文将路基考虑为非饱和多孔介质,考虑惯性、黏滞和机械耦合作用及非齐次边界,在时域内直接给出非饱和路基在单层和一维情况下瞬态响应的精确解,分析非饱和路基在阶跃荷载和正弦荷载作用下的瞬态响应特点,以期复杂环境荷载作用下非饱和路基的优化设计和灾害防控提供参考。

1 基本方程和求解条件

假设路基土体为可压缩的非饱和多孔介质,即固相和液相不可压缩,气相可压缩^[14],计算模型如图 1 所示,模型厚度为 H 。设模型的上表面($z=0$)透水透气,施加竖直向下的均布荷载 $-q(\tau)$;下表面($z=H$)为固定状态,不透水不透气。

1.1 基本方程

根据假设,推导固相、液相和气相的无量纲化一维波动基本方程^[10]。多孔材料的整体平衡方程^[10]为:

$$\sigma_{\zeta,\zeta} - u_{\zeta,\tau\tau} - \beta_w w_{\zeta,\tau\tau} - \beta_n v_{\zeta,\tau\tau} = 0, \quad (1)$$

式中: $\sigma_{\zeta,\zeta}$ 为总应力 σ_ζ 对 ζ 一阶求导, ζ 为坐标 z 的无量纲量形式, $\zeta = z/H$; u_ζ 、 w_ζ 、 v_ζ 分别为固相位移 u 、液相位移 w 、气相位移 v 对应的无量纲量, $u_{\zeta,\tau\tau}$ 、 $w_{\zeta,\tau\tau}$ 、 $v_{\zeta,\tau\tau}$ 为各无量纲量对归一化的时间参数 τ 的二阶求导; β_w 为液相密度 ρ_w 的无量纲量形式, $\beta_w = \rho_w/\rho$,其中, ρ 为土体密度; β_n 为气相密度 ρ_n 的无量纲量形式, $\beta_n = \rho_n/\rho$ 。

液相成分的平衡方程为:

$$p_{w,\zeta} + \beta_w u_{\zeta,\tau\tau} + \gamma_w w_{\zeta,\tau\tau} + 2\eta_w w_{\zeta,\tau} = 0, \quad (2)$$

式中: $p_{w,\zeta}$ 为孔隙流体压力 p_w 对 ζ 一阶求导, γ_w 、 η_w 为无量纲系数, $w_{\zeta,\tau}$ 为 w_ζ 对 τ 一阶求导。

气相成分的平衡方程为:

$$p_{n,\zeta} + \beta_n u_{\zeta,\tau\tau} + \gamma_n v_{\zeta,\tau\tau} + 2\eta_n v_{\zeta,\tau} = 0, \quad (3)$$

式中: $p_{n,\zeta}$ 为气相压力 p_n 对 ζ 一阶求导, γ_n 、 η_n 为无量纲系数, $v_{\zeta,\tau}$ 为 v_ζ 对 τ 一阶求导。

液相的连续性方程为:

$$w_{\zeta,\zeta} + S_w u_{\zeta,\zeta} = 0, \quad (4)$$

式中: $w_{\zeta,\zeta}$ 、 $u_{\zeta,\zeta}$ 为 w_ζ 、 u_ζ 对 ζ 一阶求导, S_w 为液相流体饱和度。

气相的连续性方程为:

$$\kappa_n/S_n v_{\zeta,\zeta} + \kappa_n u_{\zeta,\zeta} + p_n = 0, \quad (5)$$

式中: κ_n 为气相流体的体积模量; S_n 为气相流体饱和度,且有 $S_w + S_n = 1$; $v_{\zeta,\zeta}$ 为 v_ζ 对 ζ 一阶求导。

路基土骨架的本构方程为:

$$\sigma_\zeta + S_w p_w + S_n p_n = u_{\zeta,\zeta}, \quad (6)$$

式中: σ_ζ 为总应力; p_w 为孔隙流体压力,以压应力为正方向。

式(4)对 ζ 积分,可得:

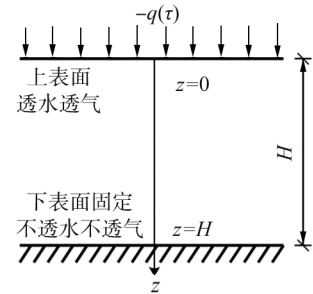


图 1 单层非饱和多孔介质一维模型

$$w_{,\zeta}(\zeta, \tau) + S_w u_{,\zeta}(\zeta, \tau) = c(\tau), \quad (7)$$

式中 $c(\tau)$ 为常数。

结合式(1)~(3)、(5)~(7)消去 $w_{,\zeta}(\zeta, \tau)$ 、 $p_n(\zeta, \tau)$ 及其相关导数,可得多孔材料一维矩阵形式的波动控制方程为:

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_{,\zeta\zeta} + \mathbf{M} \mathbf{u}_{,\tau\tau} + \mathbf{C} \mathbf{u}_{,\tau} + \mathbf{f} = 0, \quad (8)$$

式中: $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{f}$ 为系数矩阵,其中 $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -\kappa_n & -\kappa_n/S_n \\ \kappa_n S_n + 1 & \kappa_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \beta_n & \gamma_n \\ \theta_w & -\beta_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2\eta_w \\ -2\eta_w S_w^2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\gamma_w S_w - \beta_w) c_{,\tau\tau} + 2\eta_w S_w c_{,\tau} \end{pmatrix}$, $\theta_w = 2\beta_w S_w - 1 - \gamma_w S_w^2$; $\mathbf{u}$ 为位移向量, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_{,\tau}$ 、 $\mathbf{u}_{,\tau\tau}$ 分别为 $\mathbf{u}$ 对 τ 的一阶和二阶求导; $\mathbf{u}_{,\zeta\zeta}$ 为 $\mathbf{u}$ 对 ζ 的二阶求导。

1.2 求解条件

无量纲条件下,边界条件模型的上表面($z=0$)透水透气;下表面($z=H$)为固定状态,不透水不透气,可表示为:

$$\sigma(0, \tau) = -q(\tau), p_w(0, \tau) = 0, p_n(0, \tau) = 0, u(1, \tau) = w(1, \tau) = v(1, \tau) = 0. \quad (9)$$

根据式(4)~(6),式(9)可改写为非齐次边界条件:

$$u_{,\zeta}(0, \tau) = -q(\tau), w_{,\zeta}(0, \tau) = S_w q(\tau), v_{,\zeta}(0, \tau) = S_n q(\tau), u(1, \tau) = w(1, \tau) = v(1, \tau) = 0, \quad (10)$$

式中: $u_{,\zeta}$ 为 u 对 ζ 一阶求导, $w_{,\zeta}$ 为 w 对 ζ 一阶求导, $v_{,\zeta}$ 为 v 对 ζ 一阶求导。

量纲归一化的初始条件为:

$$u(\zeta, 0) = w(\zeta, 0) = v(\zeta, 0) = 0, \quad u_{,\tau}(\zeta, 0) = w_{,\tau}(\zeta, 0) = v_{,\tau}(\zeta, 0) = 0,$$

式中: $u_{,\tau}$ 为 u 对 τ 一阶求导, $w_{,\tau}$ 为 w 对 τ 一阶求导, $v_{,\tau}$ 为 v 对 τ 一阶求导。

令式(8)中 $\zeta=1$,并代入式(9)可得:

$$c(\tau) = 0. \quad (11)$$

本文给出的求解方法同样适用于非零初始条件,由式(7)(11)可知,对于固相和液相不可压缩的非饱和多孔介质路基模型,初始条件需满足 $w_{,\zeta}(\zeta, 0) + S_w u_{,\zeta}(\zeta, 0) = 0$, $w_{,\zeta,\tau}(\zeta, 0) + S_w u_{,\zeta,\tau}(\zeta, 0) = 0$ 。

2 问题求解

为求解方程(8),结合边界方程(10)(11),将解 $\mathbf{u}$ 分解为两部分之和,即

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^d + \mathbf{u}^s, \quad (12)$$

式中: $\mathbf{u}^d$ 、 $\mathbf{u}^s$ 为拆分后的位移列向量, $\mathbf{u}^d = (u_{,\zeta}^d, v_{,\zeta}^d)^T$, $\mathbf{u}^s = (u_{,\zeta}^s, v_{,\zeta}^s)^T$, 且满足 $\mathbf{u}^s = \begin{pmatrix} -q(\tau) \\ S_n q(\tau) \end{pmatrix} (\zeta - 1)$, $u_{,\zeta}^d$ 、 $v_{,\zeta}^d$ 、 $u_{,\zeta}^s$ 、 $v_{,\zeta}^s$ 为对应列向量元素。

将式(12)代入式(8)(10)(11),可得控制方程为:

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_{,\zeta\zeta}^d + \mathbf{M} \mathbf{u}_{,\tau\tau}^d + \mathbf{C} \mathbf{u}_{,\tau}^d = -\mathbf{K} \mathbf{u}_{,\zeta\zeta}^s - \mathbf{M} \mathbf{u}_{,\tau\tau}^s - \mathbf{C} \mathbf{u}_{,\tau}^s, \quad (13)$$

式中: $\mathbf{u}_{,\zeta\zeta}^d$ 为 $\mathbf{u}^d$ 对 ζ 二阶求导, $\mathbf{u}_{,\tau\tau}^d$ 为 $\mathbf{u}^d$ 对 τ 二阶求导, $\mathbf{u}_{,\tau}^d$ 为 $\mathbf{u}^d$ 对 τ 一阶求导, $\mathbf{u}_{,\zeta\zeta}^s$ 为 $\mathbf{u}^s$ 对 ζ 二阶求导, $\mathbf{u}_{,\tau\tau}^s$ 为 $\mathbf{u}^s$ 对 τ 二阶求导, $\mathbf{u}_{,\tau}^s$ 为 $\mathbf{u}^s$ 对 τ 一阶求导。

初始条件为:

$$\mathbf{u}^d(\zeta, 0) = -\mathbf{u}^s(\zeta, 0), \mathbf{u}_{,\tau}^d(\zeta, 0) = -\mathbf{u}_{,\tau}^s(\zeta, 0). \quad (14)$$

边界条件为:

$$\mathbf{u}_{,\zeta}^d(0, \tau) = 0, \mathbf{u}^d(1, \tau) = 0. \quad (15)$$

2.1 齐次方程的解

求解式(13)对应的齐次方程,即:

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_{,\zeta\zeta}^d + \mathbf{M} \mathbf{u}_{,\tau\tau}^d + \mathbf{C} \mathbf{u}_{,\tau}^d = \mathbf{0}。 \quad (16)$$

假设式(16)的解为:

$$\mathbf{u}^d(\zeta, \tau) = \mathbf{T}(\tau) Z(\zeta), \quad (17)$$

式中: $\mathbf{T}(\tau)$ 为关于 τ 的列向量函数, $Z(\zeta)$ 是关于 ζ 的标量函数。

将式(17)代入式(16)可得:

$$\mathbf{K} \frac{Z_{,\zeta\zeta}(\zeta)}{Z(\zeta)} \mathbf{T}(\tau) = -\mathbf{M} \mathbf{T}_{,\tau\tau}(\tau) - \mathbf{C} \mathbf{T}_{,\tau}(\tau), \quad (18)$$

式中: $Z_{,\zeta\zeta}(\zeta)$ 为 $Z(\zeta)$ 对 ζ 二阶求导, $\mathbf{T}_{,\tau}(\tau)$ 、 $\mathbf{T}_{,\tau\tau}(\tau)$ 分别为 $\mathbf{T}(\tau)$ 对 τ 一阶、二阶求导。

式(18)右端项是 τ 的函数, 因此可得:

$$Z_{,\zeta\zeta}(\zeta) - \delta Z(\zeta) = 0, \quad (19)$$

式中 δ 为任意指定的常数。

式(19)的解为:

$$Z(\zeta) = \begin{cases} c_1 \zeta + c_2, \delta = 0 \\ c_3 e^{\omega \zeta} + c_4 e^{-\omega \zeta}, \delta = \omega^2 > 0 \\ c_5 \cos(\omega \zeta) + c_6 \sin(\omega \zeta), \delta = -\omega^2 < 0 \end{cases} \quad (20)$$

式中 $c_1 \sim c_6$ 为常数项系数。

将式(17)代入边界条件(15), 可得:

$$Z_{,\zeta}(0) = 0, Z(1) = 0。 \quad (21)$$

将式(21)代入式(20), 可得:

$$c_1 = c_2 = Z_0(\zeta) = 0; c_3 = c_4 = Z_\omega(\zeta) = 0; c_6 = 0; Z_{-\omega}(\zeta) = c_5 \cos(\omega \zeta); \omega = (k - 1/2)\pi, k = 1, 2, 3, \dots,$$

因此, 齐次方程解为:

$$\mathbf{u}^d(\zeta, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{T}_k(\tau) Z_k(\zeta); Z_k(\zeta) = \cos(\omega_k \zeta); \omega_k = (k - 1/2)\pi, k = 1, 2, 3, \dots。 \quad (22)$$

式中 $\mathbf{T}_k(\tau)$ 、 $Z_k(\zeta)$ 为 $\mathbf{T}(\tau)$ 、 $Z(\zeta)$ 函数的 k 项表达式。

2.2 非齐次方程的解

将式(22)代入式(13), 可得到:

$$\mathbf{K} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{T}_k(\tau) Z_{k,\zeta\zeta}(\zeta) + \mathbf{M} \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(\zeta) \mathbf{T}_{k,\tau\tau}(\tau) + \mathbf{C} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{T}_{k,\tau}(\tau) Z_k(\zeta) = -\mathbf{K} \mathbf{u}_{,\zeta\zeta}^s - \mathbf{M} \mathbf{u}_{,\tau\tau}^s - \mathbf{C} \mathbf{u}_{,\tau}^s, \quad (23)$$

式中: $Z_{k,\zeta\zeta}(\zeta)$ 为 $Z_k(\zeta)$ 对 ζ 二阶求导, $\mathbf{T}_{k,\tau\tau}(\tau)$ 为 $\mathbf{T}_k(\tau)$ 对 τ 二阶求导。

式(23)两侧同时乘以 $Z_k(\zeta)$, 并从 0 到 1 积分, 利用三角函数正交性, 可得:

$$-\omega_k^2 \mathbf{K} \mathbf{T}_k(\tau) + \mathbf{M} \mathbf{T}_{k,\tau\tau}(\tau) + \mathbf{C} \mathbf{T}_{k,\tau}(\tau) = \mathbf{G}_k(\tau), \quad (24)$$

式中: $\mathbf{T}_{k,\tau}(\tau)$ 为 $\mathbf{T}_k(\tau)$ 对 τ 一阶求导; $\mathbf{G}_k(\tau)$ 为矩阵函数, $\mathbf{G}_k(\tau) = 2 \int_0^1 Z_k(\zeta) (-\mathbf{K} \mathbf{u}_{,\zeta\zeta}^s - \mathbf{M} \mathbf{u}_{,\tau\tau}^s - \mathbf{C} \mathbf{u}_{,\tau}^s) d\zeta$ 。

将式(22)代入式(14), 两边乘以 $Z_p(\tau)$, 并从 0 到 1 积分, 利用三角函数正交性, 可得 $\mathbf{T}_k(\tau)$ 初始条件为:

$$\mathbf{T}_k(0) = -2 \int_0^1 Z_k(\zeta) \mathbf{u}^s(\zeta, 0) d\zeta, \quad \mathbf{T}_{k,\tau}(0) = -2 \int_0^1 Z_k(\zeta) \mathbf{u}_{,\tau}^s(\zeta, 0) d\zeta。 \quad (25)$$

式(24)(25)可写为:

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{\Gamma}(\tau) = \mathbf{N} \mathbf{\Gamma}(\tau) + \mathbf{H}(\tau), \quad \mathbf{\Gamma}(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_k(\zeta, 0) \\ \mathbf{T}_{k,\tau}(\zeta, 0) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

式中: $\mathbf{\Gamma}(\tau)$ 、 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{H}(\tau)$ 为新引入矩阵函数, 其中 $\mathbf{\Gamma}(\tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_k(\tau) \\ \mathbf{T}_{k,\tau}(\tau) \end{pmatrix}$, $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \omega_k^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}(\tau) =$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}_k \end{pmatrix}。$$

式(26)的解为:

$$\mathbf{F}_p(\tau) = e^{N_p\tau} \mathbf{F}_p(0) + e^{N_p\tau} \int_0^\tau e^{-N_p\zeta} \mathbf{H}_p(\zeta) d\zeta。$$

可根据 Hamilton-Caylay 定理^[15]求得 $e^{N_p\tau}$ 。

求得 $\mathbf{u}^d, \mathbf{u}^s$ 后经计算可获得 $\mathbf{u}(\zeta, \tau)$ 的解,再将解代入式(1)、(5)~(7)中,可获得全部应力-位移的解为:

$$\begin{aligned} u(\zeta, \tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\tau) \cos(\omega_k \zeta) - q(\tau)(\zeta - 1), \\ v(\zeta, \tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\tau) \cos(\omega_k \zeta) + S_{nq}(\tau)(\zeta - 1), \\ \sigma(\zeta, \tau) &= (1 - \beta_w S_w) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k} \sin(\omega_k \zeta) T_{k,\tau\tau}(\tau) + \beta_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k} \sin(\omega_k \zeta) T_{k,\tau\tau}(\tau) (1 - \beta_w S_w - \beta_n S_n) q_{,\tau\tau}(\tau) (\zeta - \zeta^2/2) - q(\tau), \\ p_w(\zeta, \tau) &= (-\beta_w + \gamma_w S_w) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k} \sin(\omega_k \zeta) T_{k,\tau\tau}(\tau) + 2\eta_w S_w \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k} \sin(\omega_k \zeta) T_{k,\tau}(\tau) (-\beta_w - \gamma_w S_w) q_{,\tau\tau}(\tau) (\zeta - \zeta^2/2) + 2\eta_w S_w q_{,\tau}(\tau) (\zeta - \zeta^2/2), \\ p_n(\zeta, \tau) &= \frac{\kappa_n}{S_n} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \sin(\omega_k \zeta) T_{k,\tau\tau}(\tau) - \kappa_n \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \sin(\omega_k \zeta) T_{k,\tau\tau}(\tau)。 \end{aligned}$$

3 算例分析

3.1 正确性验证

假设材料内部孔隙内的流体均为水,设 κ_n 无穷大。本文模型的气相、液相、固相三相均不可压缩,可退化为对应的饱和和多孔介质材料,验证所用参数^[10],验证结果为:土颗粒拉梅常数 $\lambda = 144.7$ MPa,土颗粒剪切模量 $\mu = 98$ MPa,孔隙率 $n = 0.48$, $\rho_s = 2.7 \times 10^3$ kg/m³, $\rho_w = 10^3$ kg/m³, $\rho_n = 762$ kg/m³, $S_w = 0.8$, $S_n = 0.2$ 。

在 $\zeta = 0.5$ 处,无量纲孔隙流体压力、无量纲相对固体骨架位移在阶跃荷载 $q(\tau) = 1$ 作用下的结果如图2、3所示。

由图2、3可知:本文所提方法得到的结果与采用文献[10]方法获得结果基本一致,可证明本文方法和程序正确。

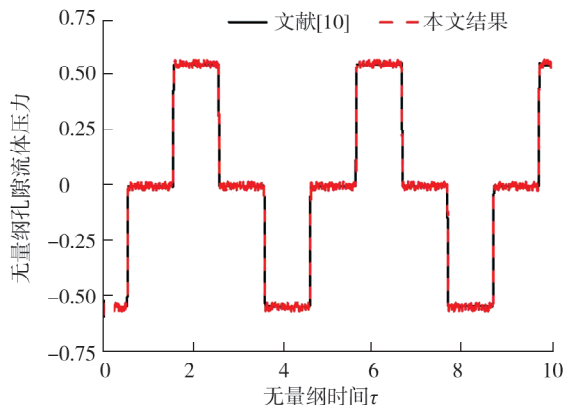


图2 不同方法的无量纲孔隙流体压力-时程曲线对比

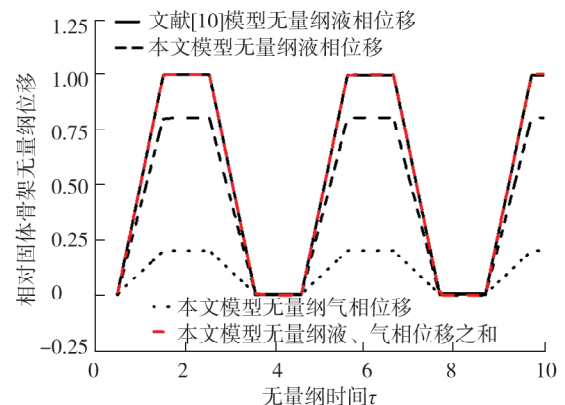


图3 不同方法的无量纲相对固体骨架位移-时程曲线对比

3.2 阶跃荷载

在非饱和路基上表面施加 $q(\tau) = 1$ 阶跃荷载, $\kappa_n = 142 \text{ kPa}$, $\rho_n = 1.29 \text{ kg/m}^3$ 。 $\zeta = 0.5$ 处, 不同饱和度 S_w 下孔压响应结果如图 4 所示。由图 4 可知: 与可压缩的饱和土和非饱和土不同, 在不可压缩非饱和路基中只存在 1 种压缩波。非饱和路基内部流体的不同比例对瞬态响应产生显著影响。随着液相饱和度的增大, 压缩波波速减小, 但变化幅度不大, 孔压的振动幅值也减小。

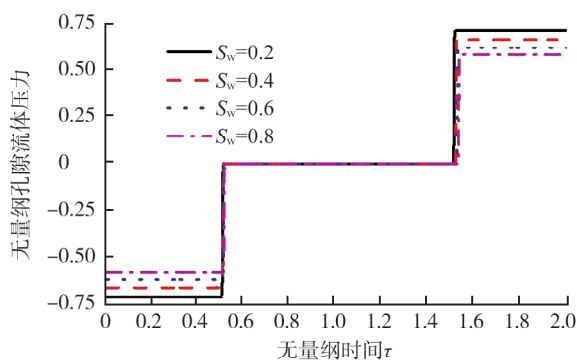


图 4 阶跃荷载下不同饱和度孔压-时程曲线

3.3 正弦荷载

非饱和路基上表面分别作用正弦荷载 $q(\tau) = \sin(0.489\pi\tau)$ 和 $q(\tau) = \sin(0.100\pi\tau)$, $\zeta = 0.5$ 处, 不同激励角频率 ω 下孔压响应结果如图 5 所示。由图 5 可知: 激励角频率接近系统自由振动频率时, 出现明显的共振现象。

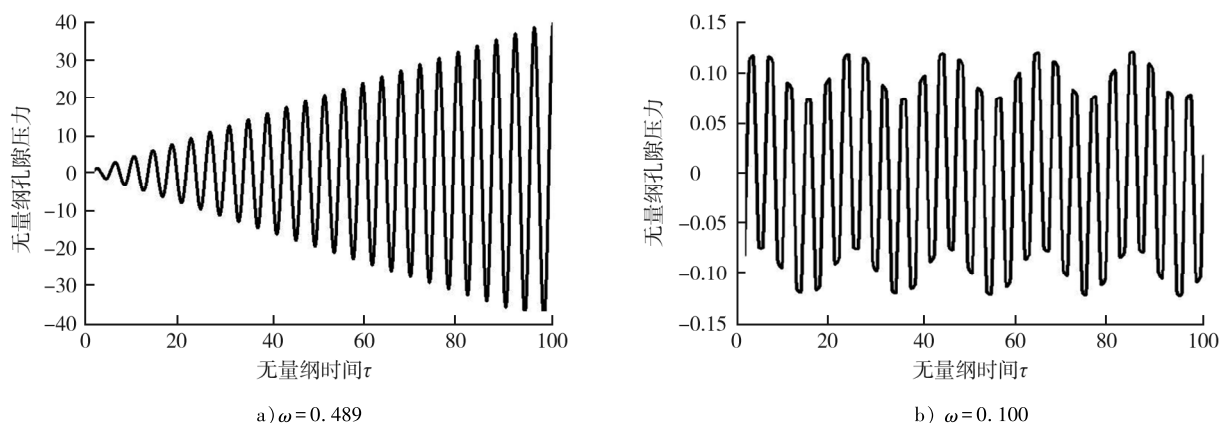


图 5 正弦荷载下液相孔隙流体压力-时程曲线

4 结束语

基于非饱和多孔介质一维控制方程, 考虑惯性、黏滞和机械耦合作用, 固相、液相流体不可压缩, 气相流体可压缩, 给出时域内任意竖向荷载作用下非饱和路基模型的一维问题解, 对内部有不同黏性耦合作用的固相、液相不可压缩的非饱和多孔介质路基模型, 该方法同样具有较好的适用性, 可推广至其他边界条件。在不可压缩非饱和路基中只存在 1 种压缩波, 液相饱和度增大, 压缩波波速和振动幅值减小。

参考文献:

- [1] KAUSEL E. Generalized stiffness matrix method for layered soils[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2018, 115: 663-672.
- [2] MA L X, OUYANG H J, SUN C, et al. A curved 2.5D model for simulating dynamic responses of coupled track-tunnel-soil system in curved section due to moving loads[J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 451:1-31.
- [3] DINEVA P S, MANOLIS G D, WUTTKE F. Fundamental solutions in 3D elastodynamics for the BEM: a review[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2019, 105: 47-69.
- [4] LING D S, ZHAO Y, HUANG B, et al. Analysis of dynamic stress path in inhomogenous subgrade under moving aircraft load[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2018, 111:65-76.
- [5] WANG F, DING T, HAN X L, et al. Dynamic Green's functions for an anisotropic poroelastic half-space[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2020, 44(6): 904-920.
- [6] ZHANG H Q, PAN E. Time-harmonic response of transversely isotropic and layered poroelastic half-spaces under general

- buried loads[J]. Applied Mathematical Modelling, 2020, 80: 426–453.
- [7] BIAN X C, HU J, THOMPSON D, et al. Pore pressure generation in a poro-elastic soil under moving train loads[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2019, 125: 105711.
- [8] TANG C X, LU Z, YAO H L, et al. Vibration characteristics of unsaturated runways under moving aircraft loads[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2021, 21(5): 2150065.
- [9] ZI Y, ZHI Y A. Elastodynamic analyses of transversely isotropic unsaturated subgrade-pavement system under moving loads [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2022, 46(11): 2138–2162.
- [10] SHAN Z D, LING D S, DING H J, et al. A semi-analytical solution for the transient response of one-dimensional unsaturated single-layer poroviscoelastic media[J]. Computers and Geotechnics, 2016, 76: 75–82.
- [11] ZHAO Y, CHEN X M, CHEN Z L, et al. A semi-analytical solution for the transient response of one-dimensional unsaturated single-layer porous media with general boundary conditions [J]. Transportation Geotechnics, 2023, 42:101006.
- [12] 李伟华,王文强. 非饱和土地基振动响应分析[J]. 振动与冲击, 2019,38(12):182–212.
- [13] GAO G Y, YAO S F, YANG J, et al. Investigating ground vibration induced by moving train loads on unsaturated ground using 2.5D FEM[J]. Soil Dynamic and Earthquake Engineering, 2019, 124:72–85.
- [14] ZIENKIEWICZ O C, CHAN A H C, PASTOR M, et al. Computational geomechanics with special reference to earthquake engineering[M]. Chichester, England: John Wiley & Sons, 1999.
- [15] BELLMAN R. Introduction to matrix analysis [M]. 2nd ed. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.

Analytical investigation of one-dimensional transient response for unsaturated subgrade

YANG Xiangru¹, BU Liping¹, CHEN Xuemei², ZHAO Yun^{2}*

1. College of Civil Engineering, Fujian Chuanzheng Communications College, Fuzhou 350007, China;

2. College of Civil Engineering and Architecture, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, China

Abstract: To reflect the actual state of the unsaturated three-phase medium of the subgrade, the subgrade is regarded as an unsaturated porous medium with incompressible solid and liquid phases, and a compressible gas phase. Based on the representation method of unsaturated porous media, considering the effects of inertia, viscosity, and mechanical coupling, a dimensionless one-dimensional wave equation for the unsaturated subgrade is established. Taking a type of non-homogeneous boundary as an example, the problem is transformed into an initial value problem of a second-order ordinary differential equation through boundary homogenization and the method of characteristic functions, and the state-space method is used to obtain the exact solution of the one-dimensional transient response of a single-layer unsaturated subgrade. The correctness of the results is verified through numerical examples. The characteristics of the one-dimensional transient response of the single-layer unsaturated subgrade under step and sinusoidal loads are analyzed. The results show that, unlike compressible saturated and unsaturated soils, there is only one type of compression wave in the incompressible unsaturated subgrade. As the liquid phase saturation increases, the wave speed and vibration amplitude of the compression wave decrease. The conclusion can provide a reference for the optimal design and disaster prevention of unsaturated subgrades under complex environmental loads.

Keywords: geotechnical engineering; unsaturated subgrade; transient response; analytical solution

(责任编辑:王惠)